

1

Продов 2.53

Один моль ідеального газу, теплоємність якого за сталого тиску C_p , виконує процес за законом $p = p_0 + \frac{\alpha}{V}$, де p_0, α – сталі. Знайти : а) теплоємність газу як функцію його об'єму; б) кількість теплоти, яку отримав газ, при його розширенні від V_1 до V_2 .

а) З умови задачі

$$p = p_0 + \frac{\alpha}{V}; \quad dp = -\frac{\alpha}{V^2} dV, \quad Vdp = -\frac{\alpha}{V} dV.$$

З рівняння Клапейрона

$$pV = RT; \quad p_0V + \alpha = RT; \quad p_0dV = RdT; \quad dV = \frac{R}{p_0} dT.$$

З іншого боку,

$$pdV + Vdp = RdT; \\ RdT = pdV + Vdp = pdV - \frac{\alpha}{V} dV; \quad pdV = RdT + \frac{\alpha}{V} dV.$$

Знайдемо роботу

$$\delta A = pdV = RdT + \frac{\alpha}{V} \frac{R}{p_0} dT.$$

Підставивши все у перше начало термодинаміки, маємо

$$CdT = C_V dT + pdV = C_V dT + RdT + \frac{\alpha}{V} \frac{R}{p_0} dT = (C_V + R)dT + \frac{\alpha R}{p_0 V} dT,$$

звідки

$$C = C_p + \frac{\alpha R}{p_0 V}.$$

б) Кількість теплоти знайдемо через теплоємність

$$dQ = CdT; \quad dT = \frac{p_0}{R} dV.$$

Підставимо всі значення у враз для теплоємності

$$dQ = \left(C_p + \frac{\alpha R}{p_0 V} \right) \frac{p_0}{R} dV = C_p \frac{p_0}{R} dV + \frac{\alpha}{V} dV$$

і проінтегруємо

$$Q = C_p \frac{p_0}{R} \int_{V_1}^{V_2} dV + \alpha \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = C_p \frac{p_0}{R} (V_2 - V_1) + \alpha \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

10

Знайти імовірність того, що флуктуація не перевищує потрібного значення середньої квадратичної флуктуації.

Скористаємось розподілом Гауса, вираженим через дисперсію

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\Delta n)^2}} e^{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2(\Delta n)^2}}$$

Позначимо величину флуктуації $n - \bar{n} = x$. Тоді середній квадрат флуктуації $\overline{x^2}$. В таких позначеннях розподіл Гауса набуває вигляду

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\overline{x^2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\overline{x^2}}\right).$$

Знаходження імовірності того, що величина флуктуації не буде перевищувати потроєного середньої квадратичної флуктуації $x < 3\sqrt{\overline{x^2}}$, означає знаходження імовірності того, що модуль флуктуації буде більший за квадратний корінь із подвоєного середнього квадрату $|x| < \sqrt{3\overline{x^2}}$, тобто лежати у межах $-\sqrt{3\overline{x^2}} < x < \sqrt{3\overline{x^2}}$. Імовірність буде визначатись як

$$W\left(x < 3\sqrt{\overline{x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\overline{x^2}}} \int_{-3\sqrt{\overline{x^2}}}^{3\sqrt{\overline{x^2}}} e^{-\frac{x^2}{2\overline{x^2}}} dx = 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\overline{x^2}}} \int_0^{3\sqrt{\overline{x^2}}} e^{-\frac{x^2}{2\overline{x^2}}} dx.$$

Заміна $y^2 = \frac{x^2}{2\overline{x^2}}$ змінить межі інтегрування

$$x = 0 \rightarrow y = 0; \quad x = 3\sqrt{2\overline{x^2}} \rightarrow y = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

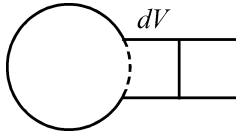
Тоді

$$W\left(x < 3\sqrt{\overline{x^2}}\right) = 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\overline{x^2}}} \sqrt{2\overline{x^2}} \int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} e^{-y^2} dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} e^{-y^2} dy.$$

11 1.4 (решебник)

Знайти тиск повітря у відкачуваній посудині як функцію часу відкачки t . Об'єм посудини V , початковий тиск p_0 , процес відкачки ізотермічний, швидкість відкачки $C = \frac{dV}{dt}$ не залежить від тиску p .

Процес ізотермічний, отже скористаємось законом Бойля-Маріотта $pV = \text{const}$.



Вважаючи, що в момент часу $t + dt$ тиск та об'єм відповідно дорівнюють $p + dp$ та $V + dV$, знехтувавши доданками другого порядку малості маємо

$$pV = (p + dp)(V + dV), \quad \text{звідки} \quad Vdp = -pdV.$$

Тоді:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{C}{V} dt; \quad p = Ke^{-\frac{C}{V}t},$$

де K – стала інтегрування. Визначимо її, користуючись граничними умовами $t = 0$, $p = p_0$, отже $K = p_0$, і остаточно

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{C}{V}t\right).$$

Примітка: Задача, яку ми розв'язали, – нереальна. В загальному випадку існує “граничний вакуум” з тиском p_∞ , пов'язаний із неконтрольованим натіканням газу в посудину. Якщо швидкість такого натікання Q не залежить від часу, то умова зберігання кількості речовини приймає вигляд

$$pV = (p + dp)(V + dV) - Qdt,$$

або

$$V \frac{dp}{dt} = -p \frac{dV}{dt} + Q.$$

Щоб спростити розв'язок рівняння, скористаємось тим, що при $t \rightarrow \infty$, $p \rightarrow p_\infty$, тому $\frac{dp}{dt} = 0$ і

$$Q = p_\infty \frac{dV}{dt} = p_\infty C.$$

Тоді $V \frac{dp}{dt} = -C(p - p_\infty)$, і звідси

$$p = p_\infty + (p - p_\infty)e^{-\frac{C}{V}t}.$$

12A

Ідеальний газ виконує цикл, який складається із:

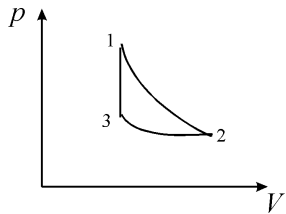
а) ізохори, адіабати і ізотерми;

б) ізобари, адіабати і ізотерми,

причому ізотермічний процес відбувається при *мінімальній* температурі циклу. Знайти к.к.д. кожного циклу, якщо температура T газу в його межах змінюється у n разів.

а) За умовою задачі $T_2 = T_3 = \frac{T_1}{n}$. Система обмінюється теплом з оточуючим середовищем лише на ділянках 23 і 31.

Кількість теплоти на цих ділянках



$$Q_{23} = RT_3 \ln \frac{V_3}{V_2} < 0; \quad Q_{31} = C_V(T_1 - T_3) > 0.$$

Тоді к.к.д. циклу

$$\eta = \frac{Q_{31} - |Q_{23}|}{Q_{31}} = 1 - \frac{|Q_{23}|}{Q_{31}}.$$

Підставимо все у вираз для к.к.д.

$$\eta = 1 - \frac{\left| RT_3 \ln \frac{V_3}{V_2} \right|}{C_V(T_1 - T_3)} = 1 - \frac{\left| R \ln \frac{V_3}{V_2} \right|}{C_V \left(\frac{T_1}{T_3} - 1 \right)}.$$

З рівняння адіабати

$$T_1 V_3^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}; \quad \frac{V_3}{V_2} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Тоді

$$\eta = 1 - \frac{\left| R \ln \frac{V_3}{V_2} \right|}{C_V \left(\frac{T_1}{T_3} - 1 \right)} = 1 - \frac{\left| R \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \right|}{C_V(n-1)} = 1 - \frac{\left| R \ln \left(\frac{1}{n} \right) \right|}{C_V(n-1)} \cdot \frac{1}{\gamma-1}.$$

Оскільки $C_p = C_V + R$; $\frac{R}{C_V} = \gamma - 1$, отже, остаточно

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{\ln n}{n-1}}.$$

12Б

Ідеальний газ виконує цикл, який складається із:

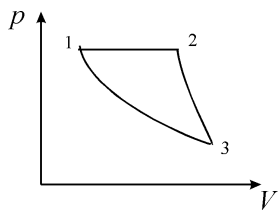
а) ізохори, адіабати і ізотерми;

б) ізобари, адіабати і ізотерми,

причому ізотермічний процес відбувається при *мінімальній* температурі циклу. Знайти к.к.д. кожного циклу, якщо температура T газу в його межах змінюється у n разів.

б) За умовою задачі $T_1 = T_3 = \frac{T_2}{n}$. Система обмінюється теплом з оточуючим середовищем лише на ділянках 12 і 31.

Кількість теплоти на цих ділянках



$$Q_{12} = C_p(T_2 - T_1) > 0;$$

$$Q_{31} = RT_3 \ln \frac{V_1}{V_3} < 0$$

Тоді к.к.д. циклу

$$\eta = \frac{Q_{12} - |Q_{31}|}{Q_{12}} = 1 - \frac{|Q_{31}|}{Q_{12}}.$$

Підставимо все у вираз для к.к.д.

$$\eta = 1 - \frac{\left| RT_3 \ln \frac{V_1}{V_3} \right|}{C_p(T_2 - T_1)} = 1 - \frac{\left| R \ln \frac{V_1}{V_3} \right|}{C_p \left(\frac{T_2}{T_3} - 1 \right)}.$$

З рівняння ізотерми $p_1 V_1 = p_3 V_3$; $\frac{V_1}{V_3} = \frac{p_3}{p_1} = \frac{p_3}{p_2}.$

З рівняння адіабати $T_2^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} p_2 = T_3^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} p_3$; $\frac{V_1}{V_3} = \frac{p_3}{p_2} = \left(\frac{T_2}{T_3} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}.$

Тоді оскільки $C_p = C_V + R = \frac{R}{\gamma - 1} + R = \frac{\gamma R}{\gamma - 1},$

$$\eta = 1 - \frac{\left| R \ln \frac{V_1}{V_3} \right|}{C_p \left(\frac{T_2}{T_3} - 1 \right)} = 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma R} \frac{\left| R \ln n^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \right|}{(n - 1)} = 1 - \frac{\ln n}{(n - 1)}.$$

отже, остаточно

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{\ln n}{n - 1}}.$$

13

1.3 (решебник), 2.12а (Иродов)

Газ здійснює процес $p = p_0 - \alpha V^2$, де p_0 і α – додатні сталі. Знайти максимально можливу температуру одного моля ідеального газу в даному процесі.

Скориставшись рівнянням стану для одного моля

$$pV = RT,$$

можна записати даний в умові задачі процес у вигляді

$$p_0 V - \alpha V^3 = RT.$$

T_{\max} знайдемо з умови

$$\frac{dT}{dV} = 0.$$

Для цього спочатку слід визначити залежність $T(V)$

$$T = \frac{p_0}{R} V - \frac{\alpha}{R} V^3.$$

Далі продиференціювавши його по V отримаємо:

$$\frac{dT}{dV} = \frac{p_0}{R} - \frac{3\alpha}{R} V^2 = 0.$$

Звідси

$$V_{\max} = \sqrt{\frac{p_0}{3\alpha}},$$

а отже, підставивши у вираз для T , маємо

$$T_{\max} = \frac{2p_0}{3R} \sqrt{\frac{p_0}{3\alpha}}.$$

Знайти середню проекцію швидкості $\langle v_x \rangle$ і $\langle |v_x| \rangle$, якщо маса кожної молекули m і температура газу T .

Середнє значення проекції швидкості визначаються як

$$\langle v_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_x \frac{dn_{v_x}}{n} = \int_{-\infty}^{\infty} v_x f(v_x) dv_x,$$

отже

$$\begin{aligned} \langle v_x \rangle &= \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} d(v_x^2) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \frac{2kT}{m} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0. \end{aligned}$$

Середнє значення модуля проекції швидкості буде відрізнятись межами інтегрування, але щоб врахувати всі молекули, треба помножити на 2 (дві молекули із такою проекцією швидкості – плюс і мінус)

$$\begin{aligned} \langle |v_x| \rangle &= 2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} d(v_x^2) = \\ &= - \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \frac{2kT}{m} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} \Big|_0^{\infty} = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \frac{2kT}{m} = \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}. \end{aligned}$$

15

Городецкий (контрольная)

Знайти найбільш імовірне значення швидкості та кінетичної енергії молекул газу у пучку, що виходить із посудини через малий отвір.

Кількість молекул, що впаде на малий отвір із середини посудини, маючи швидкість у межах $v \div v + dv$ і напрямок руху у межах кутів азимутального $\varphi \div \varphi + d\varphi$ і полярного $\theta \div \theta + d\theta$, становить

$$dv_{v,\theta,\varphi} = \frac{v dn_v}{4\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{v}{4\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \cdot n f(v) dv.$$

Молекули вилітають із отвору під різними кутами, отже проінтегруємо вираз

$$dv_v = \frac{v n f(v) dv}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{v n f(v) dv}{4\pi} 2\pi \frac{1}{2} = \frac{n}{4} v f(v) dv.$$

Використавши розподіл молекул за швидкостями у просторі, запишемо кількість молекул, що вилітають із отвору зі швидкостями у межах $v \div v + dv$ у всіх напрямках, у вигляді

$$dv_v = A n v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv.$$

По аналогії з розподілом за швидкостями у об'ємі $dn_v = n f(v) dv$ введемо розподіл молекул за швидкостями у пучку

$$f(v)_\Pi = A v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}.$$

Найімовірнішу швидкість знайдемо з умови $\frac{df(v)_\Pi}{dv} = 0$; $3v^2 - \frac{mv^2}{kT} = 0$; $v_i = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$.

Перейдемо до розподілу молекул у пучку за кінетичною енергією. Кількість молекул, енергія яких лежить у інтервалі енергій $(E, E + dE)$, становить $dn_E = n f(E) dE$.

Кінетична енергія пов'язана із швидкістю $E = \frac{mv^2}{2}$, тоді

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}}, \quad dv = \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{1}{2\sqrt{E}} dE = \frac{dE}{\sqrt{2mE}}.$$

Підставимо у функцію розподілу за швидкостями $f(E)_\Pi dE = B E e^{-\frac{E}{kT}} dE$.

Найімовірнішу енергію знайдемо з умови

$$\frac{df(E)_\Pi}{dE} = 0; \quad e^{-\frac{E}{kT}} - \frac{E}{kT} e^{-\frac{E}{kT}} = 0; \quad \boxed{E_i = kT}.$$

16

Иродов 2.139

Два моля ідеального газу спочатку ізохорно охолодили, а потім ізобарно розширили так, що температура газу стала рівною початковій. Знайти приріст ентропії газу, якщо його тиск в даному процесі змінився в $n = 3,3$ рази.

Процес не циклічний, отже ентропія зміниться. Температура повернулась до початкового значення, отже внутрішня енергія не змінилась, її не враховуємо.

Для ізохорного процесу $V = \text{const}$, отже ентропія

$$\Delta S_1 = \nu \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q_1}{T} = \nu C_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \nu C_V \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{\nu R}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2}{T_1};$$

Для ізобарного процесу $p = \text{const}$, отже ентропія

$$\Delta S_2 = \nu \int_{T_2}^{T_1} \frac{\delta Q_2}{T} = \nu C_p \int_{T_2}^{T_1} \frac{dT}{T} = \nu C_p \ln \frac{T_1}{T_2} = \frac{\nu R \gamma}{\gamma - 1} \ln \frac{T_1}{T_2};$$

Зміну температури знайдемо з рівняння ізохорного процесу

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}; \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} = n,$$

отже повна зміна ентропії

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{\nu R}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{\nu R \gamma}{\gamma - 1} \ln \frac{T_1}{T_2} = \frac{\nu R}{\gamma - 1} \left(\ln \frac{1}{n} + \gamma \ln n \right) = \frac{\nu R}{\gamma - 1} (\ln 1 - \ln n + \gamma \ln n);$$

$$\boxed{\Delta S = \nu R \ln n}.$$

17

Иродов 2.48

Ідеальний газ, показник адіабати якого γ , розширюють так, щоб тепло, яке надається газу, дорівнювало зменшенню його внутрішньої енергії. Знайти : а) молярну теплоємність газу в цьому процесі; б) рівняння процесу в параметрах (T, V) .

а) За умовою задачі

$$\delta Q = -dU.$$

Оскільки за означенням

$$dU = C_V dT = \frac{R}{\gamma - 1} dT,$$

теплоємність

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = -\frac{R}{\gamma - 1}.$$

б) Закон збереження енергії

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

Підставимо у нього інгредієнти

$$-\frac{R}{\gamma - 1} dT = \frac{R}{\gamma - 1} dT + p dV; \quad -\frac{2R}{\gamma - 1} dT = \frac{RT}{V} dV; \quad -\frac{2}{\gamma - 1} \cdot \frac{dT}{T} = \frac{dV}{V}.$$

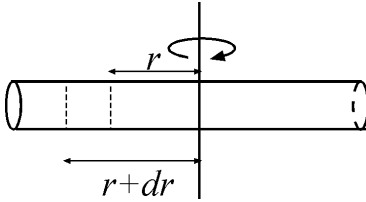
Прологарифмуємо останній вираз

$$-\frac{2}{\gamma - 1} \cdot \int \frac{dT}{T} = \int \frac{dV}{V}; \quad -\frac{2}{\gamma - 1} \cdot \ln T = \ln V + \text{const}.$$

Остаточно

$$\frac{\gamma - 1}{VT^2} + \text{const}.$$

Тонка трубка довжиною l обертається навколо вертикальної осі, що проходить крізь її середину, з частотою ν . Температура повітря дорівнює T . Визначити тиск повітря p_0 посередині трубки, якщо тиск біля відкритих її кінців дорівнює атмосферному p_a . Числові дані : $l = 0,5 \text{ м}$, $\nu = 60 \text{ Гц}$, $T = 290 \text{ К}$, $p_a = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$.



У тонкій трубці, що обертається навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю $\omega = 2\pi\nu$, розподіл густини (тиску) газу вздовж трубки визначається практично тільки полем відцентрової сили, що виникає при обертанні. Отже, за барометричною формулою

$$p = C e^{-\frac{U(r)}{kT}},$$

де $U(r) = -\frac{m\omega^2 r^2}{2}$ – потенціальна енергія молекули, що знаходиться на відстані

$(r, r + dr)$ від центру трубки. Якщо $r = 0$, то $p = p_0$; якщо $r = \frac{l}{2}$, то $p = p_a$, звідки

$$p_a = p_0 e^{-\frac{m\omega^2 r^2}{8kT}},$$

звідки

$$p_0 = p_a e^{\frac{m\omega^2 r^2}{8kT}}.$$

19

Решбник №5, с.33, Городецкий (контрольная)

У вертикально розташованій посудині висотою H знаходиться газ із температурою T . Площа основи посудини S , маса молекули газу m , загальна кількість молекул в посудині N . Знайти концентрацію газу на висоті $h < H$.

Задача зводиться до знаходження закону $n(h)$. У загальному випадку він має вигляд

$$n(h) = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}.$$

Для знаходження початкової концентрації n_0 скористаємось умовою повної кількості молекул

$$N = \int_0^H n(h) dV = \int_0^H n(h) S dh = \int_0^H n_0 S e^{-\frac{mgh}{kT}} dh = n_0 S \frac{kT}{mg} \left(1 - e^{-\frac{mgH}{kT}} \right),$$

звідси

$$n_0 = \frac{N}{S} \frac{mg}{kT} \frac{1}{1 - e^{-\frac{mgH}{kT}}}.$$

Остаточно маємо розподіл

$$n(h) = \frac{N}{S} \frac{mg}{kT} \frac{e^{-\frac{mgh}{kT}}}{1 - e^{-\frac{mgH}{kT}}}.$$

2 Продов 2.119

Горизонтально розташовану трубку із закритими торцями обертають із постійною кутовою швидкістю ω навколо вертикальної осі, яка проходить через один із її торців. В трубці знаходиться вуглекислий газ при температурі $T = 300\text{ К}$. Довжина трубки $l = 100\text{ см}$. Знайти значення ω , при якому відношення концентрацій молекул біля протилежних кінців трубки $\eta = 2$.

На молекули буде діяти відцентрова сила

$$F = m\omega^2 r,$$

тоді потенціальна енергія

$$U(r) = -\frac{m\omega^2 r^2}{2}.$$

За розподілом Больцмана зміна концентрації у полі відцентрової сили

$$n(r) = n_0 e^{-\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}},$$

тоді біля осі обертання ($r = 0$)

$$n(0) = n_0,$$

а біля дальнього кінця ($r = l$)

$$n(l) = n_0 e^{-\frac{m\omega^2 l^2}{2kT}}.$$

За умовою задачі

$$\frac{n(l)}{n(0)} = \eta = e^{-\frac{m\omega^2 l^2}{2kT}},$$

звідки

$$\omega = \sqrt{\frac{2kT \ln \eta}{ml^2}} = \sqrt{\frac{2RT \ln \eta}{\mu l^2}}.$$

20

Городецкий (контрольная)

Знайти найбільш імовірне значення швидкості та кінетичної енергії молекул газу у пучку, що виходить із посудини через малий отвір.

Кількість молекул, що впаде на малий отвір із середини посудини, маючи швидкість у межах $v \div v + dv$ і напрямок руху у межах кутів азимутального $\varphi \div \varphi + d\varphi$ і полярного $\theta \div \theta + d\theta$, становить

$$dv_{v,\theta,\varphi} = \frac{v dn_v}{4\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{v}{4\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \cdot n f(v) dv.$$

Молекули вилітають із отвору під різними кутами, отже проінтегруємо вираз

$$dv_v = \frac{v n f(v) dv}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{v n f(v) dv}{4\pi} 2\pi \frac{1}{2} = \frac{n}{4} v f(v) dv.$$

Використавши розподіл молекул за швидкостями у просторі, запишемо кількість молекул, що вилітають із отвору зі швидкостями у межах $v \div v + dv$ у всіх напрямках, у вигляді

$$dv_v = A n v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv.$$

По аналогії з розподілом за швидкостями у об'ємі $dn_v = n f(v) dv$ введемо розподіл молекул за швидкостями у пучку

$$f(v)_{\Pi} = A v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}.$$

Найімовірнішу швидкість знайдемо з умови $\frac{df(v)_{\Pi}}{dv} = 0$; $3v^2 - \frac{mv^2}{kT} = 0$; $v_i = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$

Перейдемо до розподілу молекул у пучку за кінетичною енергією. Кількість молекул, енергія яких лежить у інтервалі енергій $(E, E + dE)$, становить $dn_E = n f(E) dE$.

Кінетична енергія пов'язана із швидкістю $E = \frac{mv^2}{2}$, тоді

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}}, \quad dv = \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{1}{2\sqrt{E}} dE = \frac{dE}{\sqrt{2mE}}.$$

Підставимо у функцію розподілу за швидкостями $f(E)_{\Pi} dE = B E e^{-\frac{E}{kT}} dE$.

Найімовірнішу енергію знайдемо з умови

$$\frac{df(E)_{\Pi}}{dE} = 0; \quad e^{-\frac{E}{kT}} - \frac{E}{kT} e^{-\frac{E}{kT}} = 0; \quad E_i = kT.$$

Ідеальний газ, що складається із молекул масою m з концентрацією n , має температуру T . Знайти за допомогою розподілу Максвелла кількість молекул, які падають за одиницю часу на одиницю поверхні стінки під кутами $\theta \div \theta + d\theta$ до нормалі.

Кількість молекул, що впаде за одиницю часу на одиницю поверхні стінки посудини, маючи швидкість у межах $v \div v + dv$ і напрямок руху у межах кутів азимутального $\varphi \div \varphi + d\varphi$ і полярного $\theta \div \theta + d\theta$, становить

$$dv_{v,\theta,\varphi} = v dS dt \cos \theta dn_v d\omega = \frac{v dn_v}{4\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{v}{4\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \cdot n f(v) dv,$$

де $v dS dt \cos \theta$ – об'єм косокутного циліндру, з якого на стінку летять молекули із швидкостями і кутами у заданому інтервалі. Скористаємось розподілом Максвелла

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}},$$

тоді

$$\begin{aligned} dv_\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty dv_{v,\theta,\varphi} = \frac{n}{4\pi} 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^\infty v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv \int_0^{2\pi} d\varphi; \\ dv_\theta &= 2\pi n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^\infty v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = 2\pi n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta \frac{1}{2 \left(\frac{m}{2kT} \right)^2}; \\ &= \frac{1}{2\alpha^2} \\ dv_\theta &= \frac{\pi n}{\pi \sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta \left(\frac{2kT}{m} \right)^2 = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \cos \theta \sin \theta d\theta \sqrt{\frac{2kT}{m}}; \end{aligned}$$

остаточно

$$dv_\theta = n \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}} \cos \theta \sin \theta d\theta.$$

22

Иродов 2.52

Маємо ідеальний газ, молярна теплоємність C_V якого відома. Знайти молярну теплоємність цього газу як функцію його об'єму V , якщо газ виконує процес за законом : а) $T = T_0 e^{\alpha V}$; б) $p = p_0 e^{\alpha V}$, де T_0, p_0, α – сталі.

а) З умови задачі

$$T = T_0 e^{\alpha V}; \quad dT = \alpha T_0 e^{\alpha V} dV = \alpha T dV; \quad dV = \frac{dT}{\alpha T}.$$

З рівняння Клапейрона

$$pV = RT; \quad pdV + Vdp = RdT; \\ Vdp = RdT - pdV = RdT - \frac{RT}{V} dV = RdT - \frac{RT}{V} \frac{dT}{\alpha T} = RdT - \frac{R}{\alpha V} dT.$$

Знайдемо роботу

$$\delta A = pdV = RdT - Vdp = RdT - RdT + \frac{R}{\alpha V} dT = \frac{R}{\alpha V} dT.$$

Підставивши все у перше начало термодинаміки, маємо

$$CdT = C_V dT + pdV = C_V dT + \frac{R}{\alpha V} dT,$$

звідки

$$C = C_V + \frac{R}{\alpha V}.$$

б) З умови задачі

$$p = p_0 e^{\alpha V}; \quad dp = \alpha p_0 e^{\alpha V} dV = \alpha p dV; \quad dV = \frac{dp}{\alpha p}.$$

З рівняння Клапейрона

$$Vdp = V\alpha p dV; \quad pdV + Vdp = pdV + V\alpha p dV = (1 + V\alpha)pdV = RdT.$$

Знайдемо роботу

$$\delta A = pdV = \frac{RdT}{(1 + V\alpha)}.$$

Підставивши все у перше начало термодинаміки, маємо

$$CdT = C_V dT + pdV = C_V dT + \frac{R}{(1 + V\alpha)} dT,$$

звідки

$$C = C_V + \frac{R}{(1 + \alpha V)}.$$

З

Иродов 2.145

Ідеальний газ з показником адіабати γ виконує процес по закону $p = p_0 - \alpha V$, де p_0, α – додатні сталі. При якому значенні об'єму ентропія газу виявиться максимальною?

За означенням ентропії $\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T}$. Підставимо перше начало термодинаміки

$$\delta Q = dU + \delta A = C_V dT + p dV$$

у рівняння ентропії

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = C_V \frac{dT}{T} + \frac{p dV}{T} = C_V \frac{(p dV + V dp)}{RT} + \frac{p dV}{T} = \frac{C_p p dV + C_V V dp}{RT}.$$

Винесемо C_V і скористаємось рівнянням Майєра

$$dS = C_V \frac{\gamma p dV + V dp}{RT} = \frac{\gamma p dV + V dp}{T} \cdot \frac{1}{\gamma - 1} \cdot \frac{R}{R} = \frac{R}{\gamma - 1} \cdot \left(\frac{\gamma dV}{V} + \frac{dp}{p} \right).$$

Продиференціюємо залежність тиску від об'єму

$$dp = -\alpha dV,$$

і підставимо все, що стосується тиску до рівняння ентропії

$$dS = \frac{R}{\gamma - 1} \cdot \left(\frac{\gamma dV}{V} - \frac{\alpha dV}{p_0 - \alpha V} \right) = \frac{R}{\gamma - 1} \cdot \left(\frac{\gamma}{V} - \frac{\alpha}{p_0 - \alpha V} \right) dV.$$

У точці найбільшої ентропії похідна по ентропії перетвориться на нуль $dS = 0$

$$\frac{\gamma}{V} - \frac{\alpha}{p_0 - \alpha V} = 0;$$

звідки

$$\boxed{V_{\max} = \frac{p_0}{\alpha(\gamma + 1)}}.$$

4

Городецкий (контрольная)

Знайти середнє значення квадрата швидкості молекул газу у потоці і порівняти із середнім значенням квадрата швидкості молекул газу у об'ємі.

Скористаємось означенням середнього значення. Запишемо кількість зіткнень зі стінкою на одиницю площі за одиницю часу (потік)

$$dv_{v,\theta,\varphi} = \frac{v dn_v}{4\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{v}{4\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \cdot n f(v) dv.$$

Підставимо функцію розподілу за швидкостями Максвелла

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

Зайдемо середній квадрат швидкості

$$\langle v_{\Pi}^2 \rangle = \frac{\int v^2 dv_{v,\theta,\varphi}}{\frac{n \langle v \rangle}{4}},$$

де ділимо на середню кількість зіткнень із стінкою, тобто на середню кількість молекул у потоці. Підставляємо все і інтегруємо

$$\langle v_{\Pi}^2 \rangle = \frac{1}{\frac{n \langle v \rangle}{4}} 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{v^2 \cdot v \cdot v^2}{4\pi} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi dv;$$

$$\langle v_{\Pi}^2 \rangle = \frac{1}{\frac{n \langle v \rangle}{4}} 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} n \frac{2\pi \sin^2 \theta}{4\pi \cdot 2} \Big|_0^{\pi/2} \underbrace{\int_0^{\infty} v^5 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv}_{\propto^{-3}} = \frac{4\pi}{\langle v \rangle} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{-3} = \frac{4}{\langle v \rangle \sqrt{\pi}} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Остаточно

$$\boxed{\langle v_{\Pi}^2 \rangle = \frac{4kT}{m}}$$

Порівняємо із середнім значенням квадрата швидкості молекул газу у об'ємі

$$\boxed{\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m}}.$$

5

Иродов 2.117

Замкнуту з обох торців горизонтальну трубу довжини $l=100\text{ см}$ рухають з постійним прискоренням a , направленим вздовж її осі. Всередині трубки знаходиться аргон при температурі $T=330\text{ К}$. При якому значенні a концентрації аргону поблизу торців трубки будуть відрізнятися одна від одної на $\eta=1\%$.

Сила, яка діє на кожну молекулу аргону, $F=-ma$, робота, яка виконується при зміщенні молекули на відстань x , становить $A=-ma \cdot x$, тоді зміна енергії $U=ma \cdot x$.

Розподіл молекул у полі сили визначається законом

$$n = n_0 e^{-\frac{ma \cdot x}{kT}}.$$

Якщо трубка рухається у напрямку x , то при $x=0$ концентрація $n=n_0$, а при $x=l$

концентрація $n = n_0 e^{-\frac{ma \cdot l}{kT}}$. Природньо припустити, що концентрація молекул збільшиться біля дальнього торця ($x=0$), тому при $x=l$ за умовою задачі концентрація становить $n_0 - \eta n_0$, отже

$$n_0 - \eta n_0 = n_0 e^{-\frac{ma \cdot l}{kT}}; \quad 1 - \eta = e^{-\frac{ma \cdot l}{kT}};$$

звідки шукане прискорення

$$a = -\frac{kT \ln(1 - \eta)}{ml} = -\frac{RT \ln(1 - \eta)}{\mu l} \approx 70g.$$

Для аргону $\mu=35\text{ г/моль}$; $R=8,314\text{ Дж/К}\cdot\text{моль}$; $k=1,38 \cdot 10^{-23}\text{ Дж/К}$.

Визначити за допомогою функції розподілу за швидкостями Максвелла тиск газа на стінку, якщо температура газа T , а маса кожної молекули m .

Мікроскопічний тиск газу на стінку посудини з точки зору кінетичної теорії є сумарний імпульс, що передається одиничній площі поверхні стінки за одиницю часу внаслідок пружних зіткнень молекул із стінкою.

Нехай проекція швидкості молекули на нормаль до стінки знаходиться у межах $v_x \div (v_x + dv_x)$. Співудар є пружним, отже зміна імпульсу (кількості руху) становить

$$mv_x - (-mv_x) = 2mv_x.$$

Ця зміна імпульсу визначає імпульс сили, що діє на стінку з боку молекули. Тоді сумарна сила, що діє на одиницю площі поверхні стінки на протязі одиниці часу, (тобто тиск), з боку всіх молекул, які мають складову швидкості у межах $v_x \div (v_x + dv_x)$,

$$p_x = 2mv_x \cdot v_x dn(v_x),$$

ще одне v_x виникло, оскільки $dn(v_x)$ – це кількість молекул у одиниці об'єму, що впадуть на стінку, а $v_x dt dS dn(v_x)$ – кількість молекул у циліндрі з основою dS і твірною $v_x dt$. Оскільки беремо за одиницю часу і на одиницю площі, то її покладемо рівними одиниці.

Проінтегрувавши по всіх швидкостях, отримаємо повний тиск

$$p = 2m \int_0^{\infty} v_x^2 dn(v_x).$$

Межі інтегрування саме такі, оскільки нас цікавлять тільки ті молекули, які летять у напрямку стінки, а не від неї.

Оскільки

$$dn(v_x) = n f(v_x) dv_x; \quad f(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}},$$

маємо

$$p = 2mn \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} v_x^2 e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x.$$

Використаємо інтеграл Пуассона $\int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\pi} \alpha^{-\frac{3}{2}}$. Маємо дещо знайоме

$$p = 2mn \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \frac{1}{4} \sqrt{\pi} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{-\frac{3}{2}} = 2mn \frac{1}{4} \sqrt{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{-\frac{3}{2}} = 2mn \frac{1}{4} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{-1};$$

$$\boxed{p = nkT}.$$

Знайти $\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle$ - середнє значення оберненої швидкості молекул ідеального газу при температурі T , якщо маса кожної молекули дорівнює m . Порівняти отриману величину з оберненою величиною середньої швидкості $\frac{1}{\langle v \rangle}$.

Функція розподілу Максвелла для розподілу за абсолютними значеннями швидкості

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}.$$

Тоді середні значення

$$\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle = \int_0^\infty \frac{1}{v} f(v) dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{1}{v} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv.$$

Використаємо інтеграл Пуассона

$$\int_0^\infty x e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha}.$$

$$\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \frac{1}{2} \cdot \frac{2kT}{m} = \frac{2\pi}{\pi\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{m}{2kT}} = \sqrt{\frac{2m}{\pi kT}}.$$

Середня швидкість

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v f(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}};$$

її обернене значення

$$\frac{1}{\langle v \rangle} = \sqrt{\frac{\pi m}{8kT}}.$$

Отже

$$\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle \cdot \frac{1}{\langle v \rangle} = \sqrt{\frac{2m}{\pi kT}} \cdot \sqrt{\frac{\pi m}{8kT}} = \sqrt{\frac{2m}{\pi kT}} \cdot \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \frac{4}{\pi},$$

або

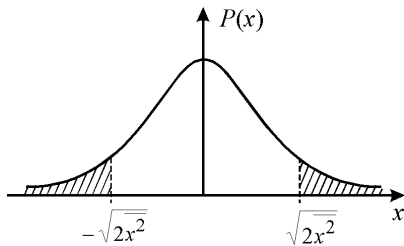
$$\boxed{\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle = \frac{4}{\pi} \langle v \rangle}.$$

8

Знайти імовірність того, що квадрат флуктуації буде більше подвоєного середнього квадрату.

Скористаємось розподілом Гауса, вираженим через дисперсію $P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{(\Delta n)^2}} e^{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2(\Delta n)^2}}$

Позначимо величину флуктуації $n - \bar{n} = x$. Тоді середній квадрат флуктуації $\overline{x^2}$. В таких позначеннях розподіл Гауса набуває



$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\overline{x^2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\overline{x^2}}\right).$$

Знаходження імовірності того, що квадрат флуктуації буде більший подвоєного середнього квадрату $x^2 > 2\overline{x^2}$, означає знаходження імовірності того, що модуль флуктуації буде більший за квадратний корінь із подвоєного середнього квадрату $|x| > \sqrt{2\overline{x^2}}$, тобто лежати у межах $x < -\sqrt{2\overline{x^2}}$ та $x > \sqrt{2\overline{x^2}}$ (дивись рисунок). Імовірність буде визначатись як

$$W(x^2 > 2\overline{x^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\overline{x^2}}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{2\overline{x^2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\overline{x^2}}\right) dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\overline{x^2}}} \int_{\sqrt{2\overline{x^2}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\overline{x^2}}\right) dx.$$

Внаслідок симетричності розподілу $P(x)$ можна записати

$$W(x^2 > 2\overline{x^2}) = 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\overline{x^2}}} \int_{\sqrt{2\overline{x^2}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\overline{x^2}}\right) dx.$$

Перетворимо інтеграл наступним чином

$$W(x^2 > 2\overline{x^2}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\overline{x^2}}} \left[\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\overline{x^2}}\right) dx - \int_0^{\sqrt{2\overline{x^2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\overline{x^2}}\right) dx \right].$$

Перший з інтегралів є інтегралом Пуассона $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.

У другому інтегралі зробимо заміну $y^2 = \frac{x^2}{2\overline{x^2}}$; $x = y\sqrt{2\overline{x^2}}$; $dx = dy\sqrt{2\overline{x^2}}$.

Межі інтегрування при цьому зміняться $x = 0 \rightarrow y = 0$; $x = \sqrt{2\overline{x^2}} \rightarrow y = 1$.

Тоді вираз для імовірності набуває вигляду

$$W(x^2 > 2\overline{x^2}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\overline{x^2}}} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{2\overline{x^2}} - \sqrt{2\overline{x^2}} \int_0^1 e^{-y^2} dy \right] = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-y^2} dy.$$

Остаточно $W(x^2 > 2\overline{x^2}) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-y^2} dy$

9 У колбі знаходиться суміш двох газів А і Б. У стінці колби є малий отвір, який з'єднує колбу і вакуум. За 1с через отвір вилітає у середньому 5 частинок газу А і 6 частинок газу Б. Яка імовірність того, що за 1 с через отвір вилетить 3 частинки газу А і 5 частинок газу Б?

Для малої кількості частинок використовуємо розподіл Пуассона

$$P(n) = \frac{(\bar{n})^n}{n!} \cdot e^{-\bar{n}}.$$

Імовірність вилітання частинок кожного газу незалежна.

$$P(n_1) = \frac{(\bar{n}_1)^{n_1}}{n_1!} \cdot e^{-\bar{n}_1}; \quad P(n_2) = \frac{(\bar{n}_2)^{n_2}}{n_2!} \cdot e^{-\bar{n}_2},$$

тому імовірність вильоту за секунду певної кількості частинок А і частинок Б є імовірністю складної події і визначається

$$P(n_1, n_2) = P(n_1) \cdot P(n_2) = \frac{\bar{n}_1^{n_1} \bar{n}_2^{n_2}}{n_1! n_2!} e^{-\bar{n}_1 - \bar{n}_2} = \frac{5^3 \cdot 6^5}{3! 5!} e^{-11} = \frac{125 \cdot 7776}{6 \cdot 120} \cdot 1,67 \cdot 10^{-5};$$

$$P(n_1, n_2) = 0,0225.$$

1. Один моль ідеального газу, теплоємність якого за сталого тиску C_p , виконує процес за законом $p = p_0 + \frac{\alpha}{V}$, де p_0, α – сталі. Знайти : а) теплоємність газу як функцію його об'єму; б) кількість теплоти, яку отримав газ, при його розширенні від V_1 до V_2 .
2. Горизонтально розташовану трубку із закритими торцями обертають із постійною кутовою швидкістю ω навколо вертикальної осі, яка проходить через один із її торців. В трубці знаходиться вуглекислий газ при температурі $T = 300$ К. Довжина трубки $l = 100$ см. Знайти значення ω , при якому відношення концентрацій молекул біля протилежних кінців трубки $\eta = 2$.
3. Ідеальний газ з показником адіабати γ виконує процес по закону $p = p_0 - \alpha V$, де p_0, α – додатні сталі. При якому значенні об'єму ентропія газу виявиться максимальною ?
4. Знайти середнє значення квадрата швидкості молекул газу у потоці і порівняти із середнім значенням квадрата швидкості молекул газу у об'ємі.
5. Замкнуту з обох торців горизонтальну трубу довжини $l = 100$ см рухають з постійним прискоренням a , направленим вздовж її осі. Всередині трубки знаходиться аргон при температурі $T = 330$ К. При якому значенні a концентрації аргону поблизу торців трубки будуть відрізнятися одна від одної на $\eta = 1\%$.
6. Визначити за допомогою функції розподілу за швидкостями Максвелла тиск газу на стінку, якщо температура газу T , а маса кожної молекули m .
- 7.
8. Знайти імовірність того, що квадрат флуктуації буде більше подвоєного середнього квадрату.
9. У колбі знаходиться суміш двох газів А і Б. У стінці колби є малий отвір, який з'єднує колбу і вакуум. За 1с через отвір вилітає у середньому 5 частинок газу А і 6 частинок газу Б. Яка імовірність того, що за 1 с через отвір вилетить 3 частинки газу А і 5 частинок газу Б?
10. Знайти імовірність того, що флуктуація не перевищує потрійного значення середньої квадратичної флуктуації.
11. Знайти тиск повітря у відкачуваній посудині як функцію часу відкачки t . Об'єм посудини V , початковий тиск p_0 , процес відкачки ізотермічний, швидкість відкачки $C = \frac{dV}{dt}$ не залежить від тиску p .
12. Ідеальний газ виконує цикл, який складається із: а) ізохори, адіабати і ізотерми; б) ізобари, адіабати і ізотерми, причому ізотермічний процес

відбувається при *мінімальній* температурі циклу. Знайти к.к.д. кожного циклу, якщо температура T газу в його межах змінюється у n разів.

13. Газ здійснює процес $p = p_0 - \alpha V^2$, де p_0 і α – додатні сталі. Знайти максимально можливу температуру одного моля ідеального газу в даному процесі.
14. Знайти середню проекцію швидкості $\langle v_x \rangle$ і $\langle |v_x| \rangle$, якщо маса кожної молекули m і температура газу T .
15. Знайти найбільш імовірне значення швидкості та ~~кінетичної енергії молекул газу у пучку, що виходить із посудини через малий отвір.~~
16. Два моля ідеального газу спочатку ізохорно охолодили, а потім ізобарно розширили так, що температура газу стала рівною початковій. Знайти приріст ентропії газу, якщо його тиск в даному процесі змінився в $n = 3,3$ рази.
17. Ідеальний газ, показник адіабати якого γ , розширюють так, щоб тепло, яке надається газу, дорівнювало зменшенню його внутрішньої енергії. Знайти : а) молярну теплоємність газу в цьому процесі; б) рівняння процесу в параметрах (T, V) .
18. Тонка трубка довжиною l обертається навколо вертикальної осі, що проходить крізь її середину, з частотою ν . Температура повітря дорівнює T . Визначити тиск повітря p_0 посередині трубки, якщо тиск біля відкритих її кінців дорівнює атмосферному p_a .
19. У вертикально розташованій посудині висотою H знаходиться газ із температурою T . Площа основи посудини S , маса молекули газу m , загальна кількість молекул в посудині N . Знайти концентрацію газу на висоті $h < H$.
20. Знайти найбільш імовірне значення швидкості та кінетичної енергії молекул газу у пучку, що виходить із посудини через малий отвір.
21. Ідеальний газ, що складається із молекул масою m з концентрацією n , має температуру T . Знайти за допомогою розподілу Максвелла кількість молекул, які падають за одиницю часу на одиницю поверхні стінки під кутами $\theta \div \theta + d\theta$ до нормалі.
22. Маємо ідеальний газ, молярна теплоємність C_V якого відома. Знайти молярну теплоємність цього газу як функцію його об'єму V , якщо газ виконує процес за законом : а) $T = T_0 e^{\alpha V}$; б) $p = p_0 e^{\alpha V}$, де T_0, p_0, α – сталі.